

ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE VECTORIELLE

André Ross

Applications en
sciences humaines



les éditions
Le Griffon d'argile

Avec laboratoires Excel et Maple

Table des sujets

CHAPITRE 1

MATRICES

1.0	PRÉAMBULE	1
1.1	MATRICES	3
	Mise en situation	3
	Opérations sur les matrices	4
	Matrices particulières	7
	James Joseph Sylvester (note historique)	9
1.2	EXERCICES	9
1.3	MULTIPLICATION DE MATRICES	11
	Mise en situation (suite)	11
	Propriétés de la multiplication des matrices	13
	Propriétés associées à la transposition des matrices	13
	Mise en situation (suite)	13
	Multiplication de matrices carrées	15
	Arthur Cayley (note historique)	16
1.4	EXERCICES	17
	RÉSUMÉ DU CHAPITRE 1	19
	VOCABULAIRE EMPLOYÉ DANS LE CHAPITRE 1	20
	PRÉPARATION À L'ÉVALUATION	21

CHAPITRE 2

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

2.0	PRÉAMBULE	23
2.1	SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES ET MATRICES	25
	Résolution de systèmes d'équations linéaires	25
	Systèmes de deux équations à deux inconnues	25
	Systèmes de trois équations à trois inconnues	28
	Systèmes d'équations linéaires et matrices	29
	Carl Friedrich Gauss (note historique)	36
2.2	EXERCICES	36
2.3	MÉTHODE DE GAUSS-JORDAN ET APPLICATIONS	40
	Méthode de Gauss-Jordan	40
	Chaînes de Markov	40
	Andreï Andreïevich Markov (note historique)	50
	Modèle de Leontieff	50
	Wassily Leontieff (note historique)	52
2.4	EXERCICES	53
	RÉSUMÉ DU CHAPITRE 2	56
	VOCABULAIRE EMPLOYÉ DANS LE CHAPITRE 2	56
	PRÉPARATION À L'ÉVALUATION	58

CHAPITRE 3

DÉTERMINANT ET MÉTHODE DE CRAMER

3.0	PRÉAMBULE	59
3.1	DÉTERMINANT	61
	Mise en situation	61
	Déterminant d'ordre n	63
	Déterminant d'une matrice (développement de LAPLACE)	64
	Matrice des cofacteurs et matrice adjointe	66
	Pierre Simon de Laplace (note historique)	67
3.2	EXERCICES	67
3.3	PROPRIÉTÉS DES DÉTERMINANTS	69
	Énoncé et utilisation des propriétés	69
	Procédure pour calculer un déterminant par matrices équivalentes	73
	Propriétés des déterminants et opérations matricielles	74
	Méthode de Cramer	75
	Gabriel Cramer (note historique)	77
3.4	EXERCICES	77
	RÉSUMÉ DU CHAPITRE	79
	VOCABULAIRE EMPLOYÉ DANS LE CHAPITRE 3	79
	PRÉPARATION À L'ÉVALUATION	80

CHAPITRE 4

MATRICE INVERSE

4.0	PRÉAMBULE	81
4.1	INVERSION DE MATRICES	83
	Méthode de Gauss-Jordan	83
	Mise en situation	83
	Matrice inverse et système d'équations linéaires	84
	Théorèmes et propriétés	86
	Méthode de la matrice adjointe	88
	Matrice inverse et matrice adjointe d'ordre 2	88
	Matrice inverse et matrice adjointe d'ordre n	89
	Inversion et matrice nilpotente	90
	Matrices et déterminants (note historique)	91
4.2	EXERCICES	91
4.3	MATRICE INVERSE ET APPLICATIONS	93
	Cryptographie (mise en situation)	93
	Chaînes de Markov	94
	Matrice inverse et point invariant	94
	Matrice inverse et chaîne de Markov absorbante	96
	Mise en situation	97
	Colin MacLaurin (note historique)	100
	Modèle de Leontieff et matrice inverse	101
	Économie ouverte	101
	Économie fermée	102
	Message codé (note historique)	105
	Tableau de conversion binaire (note)	105
4.4	EXERCICES	106
	RÉSUMÉ DU CHAPITRE 4	109
	VOCABULAIRE EMPLOYÉ DANS LE CHAPITRE 4	109
	PRÉPARATION À L'ÉVALUATION	110

CHAPITRE 5

VECTEURS GÉOMÉTRIQUES

5.0	PRÉAMBULE	111
5.1	VECTEURS GÉOMÉTRIQUES	113
	Vecteur géométrique	113
	Opérations sur les vecteurs géométriques	115
	Propriétés des opérations sur les vecteurs géométriques	118
	Parallélisme	119
	Vecteurs et démonstration de propriétés	120
	Lieu géométrique	122
	HÉRON d'Alexandrie (note historique)	124
5.2	EXERCICES	125
5.3	COMBINAISONS LINÉAIRES	128
	Mise en situation	128
	Dépendance linéaire et indépendance linéaire	128
	Vecteurs colinéaires et dépendance linéaire	130
	Vecteurs coplanaires et dépendance linéaire	131
	Base et repère d'une droite	132
	Base et repère d'un plan	133
	Base et repère de l'espace	136
	ISAAC NEWTON (note historique)	138
5.4	EXERCICES	138
	RÉSUMÉ DU CHAPITRE 5	141
	VOCABULAIRE EMPLOYÉ DANS LE CHAPITRE 5	142
	PRÉPARATION À L'ÉVALUATION	143

CHAPITRE 6

VECTEURS ALGÈBRIQUES

6.0	PRÉAMBULE	145
6.1	VECTEURS ALGÈBRIQUES	147
	Vecteurs algébriques dans \mathbb{R}^2	147
	Opérations sur les vecteurs algébriques dans \mathbb{R}^2	148
	Propriétés des opérations	150
	Localisation d'un vecteur géométrique dans \mathbb{R}^2	151
	Vecteurs algébriques dans \mathbb{R}^3	153
	Module d'un vecteur algébrique dans \mathbb{R}^3	154
	Vecteurs algébriques dans \mathbb{R}^n	156
	René DESCARTES (note historique)	158
6.2	EXERCICES	159
6.3	COMBINAISONS LINÉAIRES DE VECTEURS ALGÈBRIQUES	161
	Combinaison linéaire et vecteur engendré	161
	Dépendance linéaire et indépendance linéaire	164
	Pierre de FERMAT (note historique)	167
6.4	EXERCICES	168
	RÉSUMÉ DU CHAPITRE 6	169
	VOCABULAIRE EMPLOYÉ DANS LE CHAPITRE 6	169
	PRÉPARATION À L'ÉVALUATION	170

CHAPITRE 7

ESPACES VECTORIELS

7.0	PRÉAMBULE	171
7.1	STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL	173
	Espace vectoriel	173
	Sous-espace vectoriel	174
	Base et dimension d'un espace vectoriel	175
	Hermann GRASSMANN (note historique)	179
7.2	EXERCICES	179
7.3	SOUS-ESPACES VECTORIELS ENGENDRÉS	181
	Sous-espace engendré par un vecteur	181
	Sous-espace engendré par deux vecteurs	182
	Sous-espace engendré par trois vecteurs	183
	Description vectorielle de lieux géométriques	186
	Description d'un parallélogramme	186
	Description d'un parallélépipède	186
	Description d'un triangle	187
	Description d'une pyramide à base triangulaire	187
7.4	EXERCICES	188
	RÉSUMÉ DU CHAPITRE	189
	VOCABULAIRE UTILISÉ DANS LE CHAPITRE 7	189
	PRÉPARATION À L'ÉVALUATION	190

CHAPITRE 8

PRODUITS DE VECTEURS

8.0	PRÉAMBULE	191
8.1	PRODUIT SCALAIRE	193
	Produit scalaire de vecteurs algébriques	193
	Mise en situation	193
	Propriétés du produit scalaire	194
	Produit scalaire de vecteurs géométriques	194
	Produit scalaire nul	196
	Interprétation géométrique du produit scalaire	197
	Projection orthogonale d'un vecteur	198
	Produit scalaire et activités économiques	200
	Jérôme CARDAN (note historique)	201
8.2	EXERCICES	201
8.3	PRODUIT VECTORIEL	205
	Produit vectoriel de vecteurs algébriques	205
	Propriétés du produit vectoriel	206
	Module du produit vectoriel	206
	Sens du produit vectoriel	207
	Règle du tire-bouchon	207
	Produit vectoriel nul	208
	Interprétation géométrique du produit vectoriel	209
8.4	EXERCICES	212
	RÉSUMÉ DU CHAPITRE 8	213
	VOCABULAIRE EMPLOYÉ DANS LE CHAPITRE 8	214
	PRÉPARATION À L'ÉVALUATION	215

CHAPITRE 9

LA DROITE DANS \mathbb{R}^2

9.0	PRÉAMBULE	217
	ÉQUATIONS DE DROITES DANS \mathbb{R}^2	219
	Équation cartésienne d'une droite dans \mathbb{R}^2	219
	Vecteur normal	219
	Équations vectorielle et paramétriques d'une droite dans \mathbb{R}^2	220
	Vecteur directeur	220
	Positions relatives de droites dans \mathbb{R}^2	223
	Droites parallèles	223
	Droites concourantes	224
	Nicole ORESME (note historique)	225
9.2	EXERCICES	226
9.3	ANGLES ET DISTANCES DANS \mathbb{R}^2	228
	Angle entre deux droites	228
	Vecteurs normaux	228
	Vecteurs directeurs	229
	Distance d'un point à une droite de \mathbb{R}^2	230
	Applications en gestion	231
	Prix d'équilibre du marché	231
	Seuil de rentabilité	233
	Niveau d'indifférence	236
	Jean Robert Argand (note historique)	239
9.4	EXERCICES	239
	RÉSUMÉ DU CHAPITRE 9	242
	VOCABULAIRE EMPLOYÉ DANS LE CHAPITRE 9	243
	PRÉPARATION À L'ÉVALUATION	244

CHAPITRE 10

LE PLAN ET LA DROITE DANS \mathbb{R}^3

10.0	PRÉAMBULE	245
10.1	ÉQUATIONS DE PLANS DANS \mathbb{R}^3	247
	Équation cartésienne d'un plan de \mathbb{R}^3	247
	Vecteur normal à un plan	247
	Représentation graphique de plans dans \mathbb{R}^3	248
	Équations vectorielle et paramétriques de plans dans \mathbb{R}^3	249
	Vecteur directeur d'un plan	249
	Produit mixte de vecteurs	253
	Calcul du produit mixte	253
	Propriétés du produit mixte	254
	Interprétation géométrique du produit mixte	254
	Positions relatives de plans dans \mathbb{R}^3	255
	Emmy Nøther (note historique)	255
10.2	EXERCICES	257
10.3	ÉQUATIONS DE DROITES DANS \mathbb{R}^3	260
	Équations de droites dans \mathbb{R}^3	260
	Un point et un vecteur directeur sont connus	260
	Deux points sont connus	262
	La droite, intersection de plans	263
	Positions relatives de droites dans \mathbb{R}^3	264
	Positions relatives d'une droite et d'un plan dans \mathbb{R}^3	266
	Sofya KOVALEVSKAYA (note historique)	269
10.4	EXERCICES	269
	RÉSUMÉ DU CHAPITRE 10	273
	VOCABULAIRE EMPLOYÉ DANS LE CHAPITRE 10	273
	PRÉPARATION À L'ÉVALUATION	274

CHAPITRE 11

PROGRAMMATION LINÉAIRE

11.0 PRÉAMBULE	275
11.1 ÉLÉMENTS DE PROGRAMMATION LINÉAIRE	277
Mise en situation	277
Problème de programmation linéaire	277
Identification des variables et des contraintes	278
Représentation graphique des droites frontières	278
Évaluation de la fonction économique	279
Discussion des solutions	280
Résolution d'un problème de programmation linéaire	281
11.2 EXERCICES	286
11.3 MÉTHODE DU SIMPLEXE	289
Mise en situation	289
Variable d'écart	289
Recherche d'une solution initiale admissible	293
Problème de minimisation	295
Modification d'un problème de minimisation	295
Minimisation et problème dual	298
Problème primal et problème dual	300
Georges Bernard DANTZIG (note historique)	303
11.4 EXERCICES	304
RÉSUMÉ DU CHAPITRE 11	306
VOCABULAIRE EMPLOYÉ DANS LE CHAPITRE 11	306
PRÉPARATION À L'ÉVALUATION	307

CHAPITRE 12

PROBLÈMES DE TRANSPORT

12.0 PRÉAMBULE	309
12.1 PROBLÈMES DE TRANSPORT ET MÉTHODE DU SIMPLEXE	311
Mise en situation	311
Résolution à l'aide d'une matrice	313
Discussion de la solution	314
12.2 EXERCICES	319
12.3 PROBLÈMES DE TRANSPORT ET ALGORITHMES	321
Mise en situation	321
Détermination d'une solution initiale	322
Méthode du coin nord-ouest	322
Méthode du coût minimal	323
Détermination d'une solution optimale	325
Algorithme des pierres de gué (ou <i>stepping-stone</i>)	325
12.4 EXERCICES	329
RÉSUMÉ DU CHAPITRE 12	331
VOCABULAIRE EMPLOYÉ DANS LE CHAPITRE	331
PRÉPARATION À L'ÉVALUATION	332

CHAPITRE 13

EXERCICES DE SYNTHÈSE

PRÉAMBULE	333
EXERCICES	335

ANNEXE 1

ACTIVITÉS DE LABORATOIRE, CHIFFRIER ÉLECTRONIQUE

PRÉAMBULE	345
La feuille d'Excel	346
Laboratoire 1 : Opérations matricielles sur Excel	347
Laboratoire 2 : Systèmes d'équations linéaires	350
Laboratoire 3-A : Déterminant et systèmes d'équations linéaires	353
Laboratoire 3-B : Déterminant et produit de matrices	354
Laboratoire 4 : Matrice inverse	356
Laboratoire 5 : Matrice inverse et chaînes de Markov	357
Laboratoire 6 : Matrice inverse et chaînes de Markov avec états absorbants	357
Laboratoire 7 : Modèle de Leontieff	358
Laboratoire 8 : Programmation linéaire	358
Laboratoire 9 : Problème de transport	358

ANNEXE 2

ACTIVITÉS DE LABORATOIRE, LOGICIEL DE CALCUL SYMBOLIQUE

PRÉAMBULE	359
La feuille de Maple	360
Laboratoire 1 : Opérations matricielles sur Maple	361
Laboratoire 2 : Systèmes d'équations linéaires	364
Laboratoire 3 : Déterminant et matrice inverse	365
Laboratoire 4 : Vecteurs engendrés et indépendance linéaire	366
Laboratoire 5 : Produits de vecteurs	367
Laboratoire 6 : Plans dans \mathbf{R}^3 (Équations cartésiennes)	368
Laboratoire 7 : Plans dans \mathbf{R}^3 (Équations paramétriques)	369
Laboratoire 8 : Droites dans \mathbf{R}^3	370

RÉPONSES AUX EXERCICES	371
BIBLIOGRAPHIE	411
INDEX	413

L'ouvrage permettra au lecteur d'apprendre à appliquer les méthodes de l'algèbre linéaire et de la géométrie vectorielle à la résolution de problèmes. L'organisation de la matière, les exemples, les applications, les exercices ainsi que les laboratoires sont adaptés à la clientèle du programme de sciences humaines.

Outre les illustrations abondantes, l'approche visuelle novatrice, les mises en situation et les multiples applications font que l'élève comprend mieux les aspects les plus abstraits de la matière et favorisent le transfert de connaissances. Les exercices sont nombreux, pertinents et en cohérence avec les objectifs du cours. Des exercices de synthèse permettent de vérifier la compréhension de l'ensemble des notions présentées.

L'ouvrage a été expérimenté en classe par plusieurs enseignants. De plus, le texte, les exemples et les exercices ont été validés par une imposante équipe de réviseurs compétents.

Professeur au Cégep de Lévis-Lauzon depuis 1973, **André Ross** est titulaire d'un baccalauréat en pédagogie de l'Université Laval, d'un baccalauréat en mathématiques de l'Université du Québec à Trois-Rivières et d'une maîtrise en mathématiques de l'Université de Sherbrooke. Il est l'auteur de plus de 15 livres consacrés aux mathématiques, tous parus aux éditions Le Griffon d'argile.

L'ouvrage contient 10 laboratoires à réaliser avec le tableur Excel et 8 laboratoires à réaliser avec le logiciel de calcul symbolique Maple.

 les éditions
Le Griffon d'argile

Membre du Groupe Modulo



9 782894 432006

SOMMAIRE

Matrices
Systèmes d'équations linéaires
Méthode de Gauss-Jordan et applications
Déterminant et méthode de Cramer
Matrice inverse et applications
Vecteurs géométriques
Combinaisons linéaires de vecteurs géométriques
Vecteurs algébriques
Combinaisons linéaires de vecteurs algébriques
Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels engendrés
Produits de vecteurs
La droite dans \mathbb{R}^2
Le plan et la droite dans \mathbb{R}^3
Programmation linéaire
Problèmes de transport
Exercices de synthèse
Réponses

Laboratoires Excel

Opérations matricielles sous Excel
Systèmes d'équations linéaires
Déterminant et systèmes d'équations linéaires
Déterminant et produit de matrices
Matrice inverse
Matrice inverse et chaînes de Markov
Matrice inverse et chaînes de Markov avec états absorbants
Modèle de Leontieff
Programmation linéaire
Problème de transport

Laboratoires Maple

Opérations matricielles sous Maple
Systèmes d'équations linéaires
Déterminant et matrice inverse
Vecteurs engendrés et indépendance linéaire
Produits de vecteurs
Plans dans \mathbb{R}^3
(équations cartésiennes)
Plans dans \mathbb{R}^3
(équations paramétriques)
Droites dans \mathbb{R}^3

Applications

Chaînes de Markov, modèle de Leontieff, cryptographie, économie ouverte et fermée, prix d'équilibre du marché, seuil de rentabilité, niveau d'indifférence, minimisation, problème dual, méthode du coût minimal, etc.